COURS CHAPITRE VII CALCUL MATRICIEL 2017-2018

I) DÉFINITIONS :

1) Définitions

Une matrice est un tableau à double entrées où chaque élément du tableau est repéré par son indice de ligne i et son indice de colonne j.

On indique toujours en premier l'indice de ligne et en second l'indice de colonne.

On note : $A = (a_{ij}) \in \boxed{\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})}$ pour exprimer que le tableau A possède n lignes et p colonnes et que ses éléments a_{ij} sont dans $\mathbb{K}$ $(\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$.

Dessin :

L'ensemble des matrices carréesà n lignes et n colonnes et à coefficients dans $\mathbb{K}$ se note $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Transposition : Si $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on appelle transposée de A et on note ${}^tA$ la matrice de $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ définie par : $\forall\ i \in \{1, ..., p\},\ \forall\ j \in \{1, ..., n\},\ ({}^tA)_{ij} = a_{ji}$

Ainsi, la matrice ${}^tA$ est la matrice construite à partir de A en remplaçant les lignes par les colonnes.

Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, alors ${}^tA$ est aussi dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Rq: Si $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est une matrice unicolonne, sa transposée ${}^tC = (c_1\ ,\ c_2,\ ...\ ,\ c_n) \in \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ est une matrice uniligne.

II) OPÉRATIONS D'ESPACE VECTORIEL : SOMME MATRICIELLE ET MULTIPLICATION PAR UN SCALAIRE :

1) Addition de matrices

Définition : Soient $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{ij}) \in \mathscr{M}_{n\,,\,p}(\mathbb{K})$.

On appelle somme des matrices A et B la matrice $A + B = (d_{ij})$ définie par :

$\forall\ i \in \{1, ..., n\},\ \forall\ j \in \{1, ..., p\},\ d_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

Propriétés : $(\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})\ ,\ +)$ est un groupe commutatif, c'est-à-dire que :

- l'addition des matrices est une opération interne dans $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$,

- elle est commutative et associative,

- il existe un élément neutre, la matrice $O_{n,p}$: matrice nulle, dans $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$,

- toute matrice possède un opposé dans $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

En particulier, $(\mathscr{M}_{n}(\mathbb{K})\ ,\ +)$ est un groupe commutatif.

2) Multiplication par un scalaire

Définition : Soient $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.

On définit la matrice $\alpha.A = (b_{ij}) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par :

$$\forall\, i \in \{1,...,n\},\ \forall\, j \in \{1,...,p\},\ b_{i\,j} = \alpha\, a_{i\,j}.$$

"*Pour multiplier une matrice par un scalaire, on multiplie chaque terme de la matrice par ce scalaire*"

3) Conséquence structurale des opérations d'addition et de multiplication par un scalaire : l'e.v. $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. :

Thm : Muni des opérations précédemment définies, $(\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +, \bullet)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Déf : La base canonique de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est la famille des **matrices élémentaires** $E_{uv} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $1 \leqslant u \leqslant n$ et $1 \leqslant v \leqslant p$ définies par : $E_{uv} = (e_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ avec $e_{uv} = 1$ et $e_{ij} = 0$ si $(i,j) \neq (u,v)$.

Dessin :

Toute matrice A de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est donc égale à une unique combinaison linéaire de matrices élémentaires, d'où : Thm : $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un espace vectoriel de dimension $n \times p$

Def : Pour A$\in \mathscr{M}_{n,p}$, on appelle rang de la matrice A, et on note $\mathrm{rg}(A)$ le rang de la famille des vecteurs colonnes de A dans l'ev $\mathbb{K}^n$.

Rq: $\forall A, B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, ${}^t(\alpha A + B) = \alpha\, {}^tA + {}^tB$., autrement dit la transposition est une opération linéaire

III) Produit matriciel :

⚠LE PRODUIT DE DEUX MATRICES N'EST PAS TOUJOURS POSSIBLE

⚠EN GÉNÉRAL $A \times B \neq B \times A$.

⚠EN GÉNÉRAL LA MULTIPLICATION DES MATRICES N'EST PAS UNE OPÉRATION INTERNE.

1) Produit d'une matrice ligne par une matrice colonne (produit scalaire) :

Def : si $A \in \mathscr{M}_{1,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, alors par définition $c = A \times B \in \mathbb{K}$ est le résultat du produit scalaire de A par B.

Ex :

2) Cas général :

Def : Soient $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{ij}) \in \mathscr{M}_{p,m}(\mathbb{K})$, alors $A \times B$ est la matrice C $\in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ définie par : $\forall\ i \in [\![1,n]\!],\ \forall\ j \in [\![1,m]\!]$, c_{ij} est le produit scalaire de la ligne i de A par la ligne j de B, ce qui s'écrit $\boxed{\forall\ i \in [\![1,n]\!],\ \forall\ j \in [\![1,m]\!],\ c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}\, b_{kj}}$.

Ex 1: :

Ex 2: Soit $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$. On considère alors une matrice $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et une matrice $L \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$.

1. Préciser $L \times C$ et $C \times L$.

2. On note $A = C \times L$. Calculer les puissances successives de A.

Propriétés :

- Le produit des matrices est associatif.
- $\forall\ A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})\,,\ \forall\ B \in \mathscr{M}_{p,m}(\mathbb{K})\,,\ {}^t(A\,B) = {}^tB\ {}^tA.$

IV) CAS DES MATRICES CARRÉES :

1) L'anneau $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ Dans le cas des matrices carrées, la multiplication des matrices est une opération interne.

Elle n'est pas commutative (en général), mais est associative.

Notation : On note $\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) = \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{K})$; thm : $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau non commutatif qui admet pour elément neutre (pour $\times$) la matrice identité : $I_n = (e_{ij})$ telle que : $\begin{cases} e_{ii} = 1 \\ e_{ij} = 0, \text{ sinon} \end{cases}$

Thm HP : $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +, \times, \bullet)$ est une algèbre non commutative.

Propriétés : aucune identité remarquable (y-compris le binôme de Newton) n'est utilisable, sauf si toutes les matrices utilisées commutent entre elles : $A \times B = B \times A$.

Ex : $(A+B)^2 =$

Rq: Noter que **toute matrice** A **commute avec** I_n et que l'on peut donc développer $(A + I_n)^p$ p.ex.

2) Matrices particulières de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

Déf : $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est **triangulaire supérieure** ssi $\forall \ (i,j) \in \{1,...,n\}^2, \ a_{ij} = 0$ pour $i > j$

$A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est **triangulaire inférieure** ssi $\forall \ (i,j) \in \{1,...,n\}^2, \ a_{ij} = 0$ pour $i < j$

On note $\mathscr{T}_n^+(\mathbb{K})$ (resp. $\mathscr{T}_n^-(\mathbb{K})$) l'ensemble des matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures). Ce sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Le produit de deux matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) est une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure).

Déf : Une matrice $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est **diagonale** si : $\forall \ i \neq j, \ a_{ij} = 0$.

On note $\mathscr{D}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices diagonales : $\mathscr{D}_n(\mathbb{K})$ est stable pour $+$ et $\times$, $\mathscr{D}_n(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension n.

Démo :

Une matrice $A = (a_{ij})$ est **symétrique** si : ${}^tA = A$. On note $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices symétriques. $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Démo :

Une matrice $A = (a_{ij})$ est **antisymétrique** si : ${}^tA = -A$. On note $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices antisymétriques.

$\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Il est de dimension $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

Démo :

Une matrice $N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est dite **nilpotente** s'il existe $p > 1$ tel que $N^p = O_n$.

Complément sur les matrices élémentaires carrées :

- $\forall\ u, v, w \in \{1, ..., n\}$, $E_{uv} \times E_{vw} = E_{uw}$
- en particulier $\forall\ u \in \{1, ..., n\}$, $E_{uu}^2 = E_{uu}$
- $\forall\ u, v, w, t \in \{1, ..., n\}$, $v \neq t$, $E_{uv} \times E_{tw} = O_n$.

Démo :

Rq: Une matrice qui apparaît fréquemment dans les exercices : la matrice $U = (u_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ définie par : $\forall\ (i, j) \in \{1, ..., n\}^2$, $u_{ij} = 1$ vérifie : $U^2 = n\,U$ puis, par récurrence, $\forall\ p \in \mathbb{N}^*$, $U^p = n^{p-1}\,U$.

Démo :

3) Polynôme d'une matrice carrée $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

Déf :Soit p un polynôme $p(X) = \sum_{k=0}^{m} u_k X^k = u_0 + u_1 X + u_2 X^2 + ... + u_m X^m$.

On appelle $p(A)$ la matrice : $p(A) = u_0 I_n + u_1 A + u_2 A^2 + \ ... \ + u_m A^m$.

Prop : Deux polynômes d'une même matrice A commutent : P(A)×Q(A)=Q(A)×P(A)=(P×Q)(A)=(Q×P)(A).

Déf : p est **annulateur** de la matrice A ssi $p(A) = u_0 I_n + u_1 A + u_2 A^2 + \ ... \ + u_m A^m = O_n$ (matrice nulle n×n)

*Thm **HP** : toute matrice d'ordre n admet des polynômes annulateurs de degré n (ou moins) ; tous les polynômes annulateurs d'une matrice sont multiples d'un même polynôme annulateur minimal (pour le degré).*

$\Longrightarrow$ **Méthode:** Pour calculer l'image d'une matrice carrée M par un polynôme P, on trouve un polynôme annulateur A(X) de M, et on effectue la division euclidienne de P par A : P=AQ+R, donc P(M)=A(M)Q(M)+R(M)=R(M)

$\Longrightarrow$ **Méthode:** Idem pour le calcul d'une puissance de M : X^k=QA+R donc M^k=Q(M)A(M)+R(M)=R(M)

Ex 3: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Ex 4: Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = A - I_3$. Calculer B^m puis A^m pour $m \in \mathbb{N}$.

Ex 5: Soit $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$. Calculer U^n puis M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4)Cas des matrices carrées inversibles

Def : On dira qu'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est **inversible**, s'il existe une matrice $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A \times B = B \times A = I_n$. Si cette matrice existe, elle est unique : on la note A^{-1}. C'est l'**inverse** de A.

Thm : Une matrice carrée est inversible a droite ssi elle est inversible a gauche

Déf : On note $GL_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Thm : $(GL_n(\mathbb{K}), \times)$ est un groupe (non commutatif), par suite $(GL_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un corps (non commutatif).

Thm : pour toutes matrices $A, B \in GL_n(\mathbb{K})$, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Trois méthodes pour déterminer A^{-1} :

⟹ Méthode: 1 : Prendre une matrice $B = (b_{ij})$ à coefficients indéterminés et résoudre le système de n^2 équations à n^2 inconnues obtenu en écrivant que $B\,A = A\,B = I_n$

⟹ Méthode: 2 Résoudre le système : $A\,X = Y$ où $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ car si A est inversible, le système $A\,X = Y$ équivaut à $X = A^{-1}\,Y$; pour tout Y il faut trouver un unique X.

⟹ Méthode: 3 : On peut aussi utiliser un polynôme annulateur de la matrice A : Si A possède un polynôme annulateur tel que $u_0 \neq 0$, alors A est inversible et on peut facilement calculer son inverse :

Si $u_o \neq 0$, alors : $u_1\,A + u_2\,A^2 + \;...\; + u_m A^m = -u_0\,I_n$

et donc, $A\left(-\dfrac{u_1}{u_0}\,I_n - \dfrac{u_2}{u_0}\,A - \;...\; - \dfrac{u_n}{u_0}\,A^{n-1}\right) = \left(-\dfrac{u_1}{u_0}\,I_n - \dfrac{u_2}{u_0}\,A - \;...\; - \dfrac{u_n}{u_0}\,A^{n-1}\right)A = I_n$

ce qui prouve que : $A^{-1} = -\dfrac{u_1}{u_0}\,I_n - \dfrac{u_2}{u_0}\,A - \;...\; - \dfrac{u_n}{u_0}\,A^{n-1}$.

On admettra que la condition $u_0 \neq 0$ est une condition suffisante mais non nécessaire.

Ex 6: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, calculer A^{-1}.

Rq: Une matrice nilpotente n'est pas inversible.

Démo :

Rq: la matrice $U = (u_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ définie par : $\forall\,(i,\,j) \in \{1, ..., n\}^2$, $u_{ij} = 1$ n'est pas inversible.

Démo :

Cas des matrices d'ordre 2 :

Thm : une matrice M=$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible ssi son **déterminant** Det(M)=$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$=ad-bc est non nul ; dans ce cas $M^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Démo :

V) Une application : matrice de changement de base dans un espace vectoriel :

Thm/Déf : Soit E un espace vectoriel de dimension n, $\mathscr{B} = \{e_1, ..., e_n\}$ et $\mathscr{B}' = \{u_1, ..., u_n\}$ deux bases de E.

On a alors, en notant $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ les composantes de x dans l'ancienne base $\mathscr{B}$ et $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$ celles du même vecteur x dans la nouvelle base $\mathscr{B}'$: **X = PX'**

La matrice P s'appelle la **matrice de passage** de la base $\mathscr{B}$ vers la base $\mathscr{B}'$. Elle s'obtient en écrivant en colonne les composantes des vecteurs u_j de la base $\mathscr{B}'$ dans la base $\mathscr{B}$.

$P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et P^{-1} est la matrice de passage de la base $\mathscr{B}'$ vers la base $\mathscr{B}$, c'est-à-dire que les colonnes de P^{-1} sont les composantes des vecteurs e_j dans la base $\mathscr{B}'$.

⟦Démo :